САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

На правах рукописи

Трушкова Екатерина Александровна

СИНТЕЗИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

01.01.09 - дискретная математика и
математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов - 2002

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Хромов А.П.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Дудов С.И;

кандидат физико-математических наук, доцент Андреева Н.Л.

Ведущая организация: Саратовский государственный технический университет

Защита состоится "5" декабря 2002 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.243.02 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан "2" ноября 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Корнев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исторические сведения.

В математической теории оптимальных процессов, лежащей на стыке теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, начиная с первых моделей 50-х годов, одной из основных проблем является проблема синтеза оптимальных систем.

Эта проблема заключается в построении функции $u(t, x)$, называемой синтезирующей функцией данной задачи и представляющей собой значение оптимального управления при условии, что в момент времени t система находится в точке x. Если известна синтезирующая функция, то техническое осуществление оптимального хода процесса может быть произведено по схеме с обратной связью. Поэтому умение решать проблему синтеза очень важно в различных прикладных задачах оптимального управления.

Крупнейшие достижения математической теории оптимальных процессов — принцип максимума Л.С. Понтрягина [2, 6] и метод динамического программирования Р. Беллмана [1] — являются основными средствами решения проблемы синтеза оптимальных систем.

Синтезу оптимальных систем посвящено огромное количество работ. Тем не менее получить явное аналитическое выражение для синтезирующих функций оптимальных систем удается лишь с редких случаях. Отметим работы Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко [2, 6], Н.Н. Красовского [4], А.М. Летова [5], А.А. Фельдбаума [7].

Данная диссертационная работа посвящена решению проблемы построения функций, синтезирующих семейства оптимальных траекторий линейных стационарных задач оптимального управления с квадратичным критерием качества с помощью уравнений принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Отправными исследованиями являются исследования А.П. Хромова [8] — [11] проблемы построения синтезирующих функций для линейных задач с квадратичным критерием качества. В его работах рассматриваются всевозможные задачи оптимального управления линейной стационарной управляемой системой n–го порядка со скалярным управлением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad t_0 < t_1, \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in W_2^1[t_0, t_1]$, управление $u(t) \in L_2[t_0, t_1]$, $b = (0, \dots, 0, 1)^T$ — постоянный вектор размерности n,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -g_n & -g_{n-1} & \dots & -g_2 & -g_1 \end{pmatrix}, \quad g_i \in \mathbb{R}^1, \quad i = \overline{1.n}.$$

на минимум интегрального квадратичного критерия качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Big((x(t), Mx(t)) + (u(t), u(t)) \Big) dt \to \min, \tag{2}$$

где M — постоянная положительно определенная матрица размера $n \times n$. без ограничения на управление при различных условиях, связывающих значения траектории на концах временного отрезка. С использованием соотношений принципа максимума Л.С. Понтрягина [6]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \frac{1}{2} bb^T \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t) + 2Mx(t), \end{cases} \tag{3}$$

где $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^T$ — непрерывная вектор-функция, из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделены n-параметрические семейства

$$\mathbb{M}_{n,D,d} = \Big\{ x(t) \in W_2^1[t_0, t_1] \Big| \exists p \in \mathbb{R}^n : x(t) = \Phi_1(t)(Dp + d) \Big\}.$$

где $\Phi_1(t)$ — первые n строк фундаментальной матрицы решений системы (0.3), D — постоянная матрица размера $2n \times n$ ранга n, d — постоянный вектор размера $2n$, p есть вектор-параметр размерности n. Построены функции $u(t, x)$, для которых справедливы следующие утверждения:

1) если вектор-функция $x(t)$ есть решение системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), \tag{4}$$

и $R(x(t))$ непрерывна на множестве N, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{n,D,d}$; здесь $R(x) = (R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x))^T$,

$$R_i(x) = -2(Mx, A_1^{n-i-1}b) - 2g_{n-i}(\dot{x} - Ax, b) - \tfrac{d}{dt}\Bigg(-2(Mx, A_1^{n-i-2}b) -$$
$$-2g_{n-i-1}(\dot{x} - Ax, b) - \tfrac{d}{dt}\Bigg(\cdots - \tfrac{d}{dt}\Bigg(-2(\dot{x} - Ax, b)\Bigg)\ldots\Bigg)\Bigg), \quad i = \overline{0, n-1},$$

$R_n(x) = -2(\dot{x} - Ax, b)$, A_1 — та же матрица, что и матрица A, только последняя строка состоит из нулей, N — множество нулей функции $\det(\Phi_1(t)D)$;

2) если $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{n,D,d}$, то $x(t)$ удовлетворяет системе (4) и $R(x(t))$ непрерывна на множестве N.

Такие функции $u(t, x)$ А.П. Хромовым были названы функциями, синтезирующими семейства $\mathbb{M}_{n,D,d}$. В работе В.В. Корнева [3] исследовались точки. в которых синтезирующие функции обращаются в бесконечность (точки множества нулей функций $\det(\Phi_1(t)D)$). Показано, что таких точек — конечное число.

Цель работы.

Распространить подход А.П. Хромова к проблеме синтеза для линейной системы с квадратичным критерием качества в следующих случаях:

1. построение синтезирующих функций для k—параметрических, $1 \le k \le 2n$, семейств оптимальных траекторий задач оптимального управления (1),(2) при неотрицательно определенной матрице M и условиях. связывающих значения траектории на концах временного отрезка;

2. построение синтезирующих функций для k—параметрических, $1 \le k \le (s+2)n$, семейств оптимальных траекторий задач оптимального управления (1),(2) при неотрицательно определенной матрице M и условиях, связывающих значения траектории на концах и в конечном числе s внутренних точек временного отрезка.

Методика исследований.

Используются методы математической теории оптимального управления, теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна.

Основные результаты, полученные в диссертации:

1. построены функции, синтезирующие k—параметрические, $1 \le k \le 2n$, семейства оптимальных траекторий задач оптималь-

ного управления (1),(2) при неотрицательно определенной матрице M и условиях, связывающих значения траектории на концах временного отрезка;

2. построены функции, синтезирующие k—параметрические, $1 \leq k \leq (s+2)n$, семейства оптимальных траекторий задач оптимального управления (1),(2) при неотрицательно определенной матрице M и условиях, связывающих значения траектории на концах и в конечном числе s внутренних точек временного отрезка.

Все результаты являются новыми и приводятся с полными доказательствами.

Практическая и теоретическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в математической теории оптимального управления при построении синтезирующих функций.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на объединенном научном семинаре кафедр дифференциальных уравнений и прикладной математики и математической экономики (под руководством профессора А.П. Хромова и профессора С.И. Дудова); на 10-й Саратовской имней школе "Современные проблемы теории функций и их приближения" (Саратов, 2000 г.); на конференциях сотрудников механико-математического факультета СГУ "Математика. Механика" (Саратов, 2000 г., 2002 г.); на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2001 г.); на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения - XIII" (Воронеж, 2002 г.).

Публикации.

Основные результаты дисертации опубликованы в работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации.

Работа состоит из введения, трех глав, разделенных на четырнадцать параграфов, и списка литературы (22 наименования). Общий объем диссертации — 120 страниц.

Содержание работы

В главе 1 рассматриваются всевозможные задачи оптимального управления (1), (2) при неотрицательно определенной матрице M и различных условиях, связывающих значения траектории на концах временного отрезка. В параграфе 1.1 приводится компактное доказательство теоремы существования и единственности решения задач (1), (2) в следующих случаях:

- при неотрицательно определенной матрице M и условиях

$$\begin{gathered} S_0x(t_0) + S_1x(t_1) = a, \\ \widetilde{S}_0x(t_0) + \widetilde{S}_1x(t_1) = \widetilde{a}, \end{gathered}$$

где S_0, S_1 — постоянные матрицы размера $n \times n$, причем ранг матриц $\begin{pmatrix} S_0 & S_1 \end{pmatrix}$, $S_0 + S_1$ и $S_0 + S_1X(t_1)$ равен n, $X(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$ такая, что $X(t_0) = E_n$, E_n — единичная матрица размера $n \times n$, $\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_1$ — постоянные матрицы размера $m \times n$, причем ранг матрицы $\begin{pmatrix} S_0 & S_1 \\ \widetilde{S}_0 & \widetilde{S}_1 \end{pmatrix}$ размера $(n+m) \times 2n$ равен $(n+m)$, $0 \leq m \leq n$; a, $\widetilde{a}$ — постоянные векторы размерности n и m соответственно;

- при положительно определенной матрице M и условиях

$$S_0x(t_0) + S_1x(t_1) = a,$$

где S_0, S_1 — постоянные матрицы размера $m \times n$, причем ранг матрицы $\begin{pmatrix} S_0 & S_1 \end{pmatrix}$ равен m, a — вектор размерности m, $0 \leq m \leq 2n$.

В параграфе 1.2 с использованием соотношений принципа максимума Л.С. Понтрягина (3) из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделены k–параметрические, $1 \leq k \leq 2n$, семейства

$$\mathbb{M}_{k,D,d} = \left\{x(t) \in W_2^1[t_0,t_1] \middle| \exists p \in \mathbb{R}^k : x(t) = \Phi_1(t)(Dp + d)\right\},$$

где $\Phi_1(t)$ — первые n строк фундаментальной матрицы решений системы (3), D — постоянная матрица размера $2n \times k$ ранга k, d — постоянный вектор размера $2n$, p — вектор-параметр размерности k.

В параграфе 1.3 введена в рассмотрение вектор–функция

$$F(t,y,D,d) = D\left(Q^k\Phi_1(t)D\right)^{-1}\left(y - Q^k\Phi_1(t)d\right) + d,$$

где $y \in \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$. Здесь и всюду в дальнейшем через Q^i обозначена постоянная матрица размера $i \times n$, первые i столбцов которой составляют единичную матрицу, а остальные столбцы нулевые, $1 \le i \le n$. Через $N_k(D)$ обозначено множество нулей функции $\det\left(Q^k\Phi_1(t)D\right)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Точки множества $N_k(D)$ разбивают отрезок $[t_0, t_1]$ на конечное число непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Через $T = \{\tau_i\}_{i=\overline{1,m}}$ обозначена произвольным образом выбранная последовательность точек таких, что $\tau_i \in I_i$, $i = \overline{1,m}$.

Вводится в рассмотрение система линейных условий

$$Q_{n-k}x(t) = Q_{n-k}\Phi_1(t)F(t, Q^k x(t), D, d), \quad t \in T. \tag{5}$$

Здесь и всюду в дальнейшем через Q_i обозначена постоянная матрица размера $i \times n$, последние i столбцов которой образуют единичную матрицу, а остальные столбцы нулевые, $1 \le i \le n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8 *Если вектор-функция $x(t)$ есть решение системы*

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x_1, x_2, \ldots, x_k), \tag{6}$$

где $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена по формуле

$$u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$
$$= b^T(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t))F\Big(t, (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T, D, d\Big), \tag{7}$$

подчиненное системе линейных условий (5), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_k(D)$, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{k,D,d}$.

Обратно, если $x(t)$ есть функция семейства $\mathbb{M}_{k,D,d}$, то $x(t)$ является решением системы (6), где $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена по формуле (7), подчиненным системе линейных условий (5), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_k(D)$.

Эта теорема, сформулированная для случая $k = n$, является улучшением соответствующей теоремы А.П. Хромова [10].

Определение 1.3 *Функцию, определенную равенством (7), назовем функцией, синтезирующей семейство $\mathbb{M}_{k,D,d}$ при $1 \le k \le n$.*

Приведены примеры синтезирующих функций для некоторых k-параметрических семейств оптимальных траекторий.

В параграфе 1.4 введена в рассмотрение вектор-функция

$$F(t,z,D,d) = D\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D\right)^{-1}\left(z-\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}d\right)+d,$$

где $z\in\mathbb{R}^k$, $n+1\le k\le 2n$. Через $N_k(D)$ обозначено множество нулей функции $\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D\right)$ на отрезке $[t_0,t_1]$.

Точки множества $N_k(D)$ разбивают отрезок $[t_0,t_1]$ на конечное число непересекающихся интервалов I_1, I_2, ..., I_m. Через $T=\{\tau_i\}_{i=\overline{1,m}}$ обозначена произвольным образом выбранная последовательность точек таких, что $\tau_i\in I_i$, $i=\overline{1,m}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.10 *Если вектор-функция $x(t)$ есть решение системы*

$$\dot{x}=Ax+bu(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\dots,x_1^{(k)}),\tag{8}$$

где $u(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t),x_1^{(n)}(t),x_1^{(n+1)}(t),\dots,x_1^{(k)}(t))$ определена по формуле

$$u(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\dots,x_1^{(k)})=g(x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)})^T+x_1^{(k)}-\\ -Q^1\Phi_1^{(k)}(t)F\Big(t,(x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\dots,x_1^{(k-1)})^T,D,d\Big),\tag{9}$$

и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_k(D)$, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{k,D,d}$.

Обратно, если $x(t)$ есть функция семейства $\mathbb{M}_{k,D,d}$, то $x(t)$ является решением системы (8), где $u(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\dots,x_1^{(k)})$ определена по формуле (9), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $N_k(D)$.

Определение 1.4 *Функцию, определенную равенством (9), назовем функцией, синтезирующей семейство $\mathbb{M}_{k,D,d}$ при $n+1\le k\le 2n$.*

Приведены примеры синтезирующих функций для некоторых k-параметрических семейств оптимальных траекторий.

Вышеизложенные теоремы 1.8, 1.10 являются основными результатами первой главы настоящей работы.

В параграфе 1.5 показано, что введенные k-параметрические семейства могут быть выделены из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач с помощью $2n - k$ линейно независимых стационарных условий, связывающих значения траектории на концах временного отрезка. Приведены соответствующие примеры.

Параграф 1.6 посвящен исследованию точек, в которых синтезирующие функции обращаются в бесконечность, а именно точек множеств $N_k(D)$. Показано, что таких точек — конечное число. В простейшем случае рассматриваемых задач оптимального управления показано, что точек, в которых функции, синтезирующие k–параметрические семейства оптимальных траекторий, обращаются в бесконечность, не более $(2n - k)k$ штук. Указаны случаи, когда множества точек, в которых синтезирующие функции n–параметрических семейств оптимальных траекторий обращаются в бесконечность, пусты или содержат только одну точку.

В главе 2 рассматриваются всевозможные задачи оптимального управления (1), (2) при неотрицательно определенной матрице M и различных условиях, связывающих значения траектории на концах и в одной внутренней точке $t = \alpha$ временного отрезка. В параграфе 2.1 доказана теорема существования и единственности решения задач (1), (2) при неотрицательно определенной матрице M с закреплением траектории на концах и в точке $t = \alpha$ временного отрезка.

В параграфе 2.2 с использованием соотношений принципа максимума Л.С. Понтрягина (3), рассмотренных на $[t_0, \alpha) \bigcup (\alpha, t_1]$, из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделены семейства

$$\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1} = \left\{ x(t) \in W_2^1[t_0, t_1] \middle| \exists p, q \in \mathbb{R}^k : \right.$$

$$\Phi_1(\alpha)(D_0 p + d_0) = \Phi_1(\alpha)(D_1 q + d_1),$$

$$\left. x(t) = \begin{cases} \Phi_1(t)(D_0 p + d_0), & t \in [t_0, \alpha], \\ \Phi_1(t)(D_1 q + d_1), & t \in (\alpha, t_1] \end{cases} \right\},$$

где $\Phi_1(t)$ — есть первые n строк фундаментальной матрицы решений системы (3), D_0, D_1 — постоянные матрицы размера $2n \times k$ ранга k, d_0, d_1 — постоянные векторы размера $2n$, p, q есть вектора-параметры размерности k, $1 \leq k \leq 2n$.

В параграфе 2.3 введены в рассмотрение вектор–функции

$$F(t, y, D_i, d_i) = D_i \left(Q^k \Phi_1(t) D_i\right)^{-1} \left(y - Q^k \Phi_1(t) d_i\right) + d_i, \quad i = 0, 1,$$

где $y \in \mathbb{R}^k$, $1 \le k \le n$. В параграфе 1.6 настоящей работы показано, что множества $N_k(D_0)$ нулей функции $\det\left(Q^k\Phi_1(t)D_0\right)$ на отрезке $[t_0, \alpha]$ конечны, и множества $N_k(D_1)$ нулей функции $\det\left(Q^k\Phi_1(t)D_1\right)$ на отрезке $[\alpha, t_1]$ конечны.

Точки множества $N_k(D_0)$ разбивают отрезок $[t_0, \alpha]$ на конечное число непересекающихся интервалов $I_1(D_0)$, $I_2(D_0)$, ..., $I_{m_0}(D_0)$. Через $T(D_0) = \{\tau_i\}_{i=\overline{1,m_0}}$ обозначена произвольным образом выбранная последовательность точек таких, что $\tau_i \in I_i(D_0)$, $i = \overline{1, m_0}$. Точки множества $N_k(D_1)$ разбивают отрезок $[\alpha, t_1]$ на конечное число непересекающихся интервалов $I_1(D_1)$, $I_2(D_1)$, ..., $I_{m_1}(D_1)$. Через $T(D_1) = \{\tau_i\}_{i=\overline{1,m_1}}$ обозначена произвольным образом выбранная последовательность точек таких, что $\tau_i \in I_i(D_1)$, $i = \overline{1, m_1}$.

Вводится в рассмотрение система линейных условий

$$Q_{n-k}x(t) = Q_{n-k}\Phi_1(t)F(t, Q^k x(t), D_0, d_0), \quad t \in T(D_0), \tag{10}$$

$$Q_{n-k}x(t) = Q_{n-k}\Phi_1(t)F(t, Q^k x(t), D_1, d_1), \quad t \in T(D_1). \tag{11}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4 *Если вектор-функция $x(t) \in W_2^1[t_0, t_1]$ есть решение системы*

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x_1, x_2, \dots, x_k), \quad t \in [t_0, \alpha) \bigcup (\alpha, t_1], \tag{12}$$

где $u(t, x_1, x_2, \dots, x_k)$ определена по формуле

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_k) =$$
$$= \begin{cases} b^T(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t))F\left(t, (x_1, \dots, x_k)^T, D_0, d_0\right), & t \in [t_0, \alpha], \\ b^T(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t))F\left(t, (x_1, \dots, x_k)^T, D_1, d_1\right), & t \in (\alpha, t_1], \end{cases} \tag{13}$$

подчиненное системе линейных условий (10), (11), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(N_k(D_0) \bigcup N_k(D_1)\right) \setminus \{\alpha\}$, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}^{\alpha}_{k, D_0, D_1, d_0, d_1}$.

Обратно, если $x(t)$ есть функция семейства $\mathbb{M}^{\alpha}_{k, D_0, D_1, d_0, d_1}$, то $x(t)$ является решением системы (12), где $u(t, x_1, x_2, \dots, x_k)$ определена по формуле (13), подчиненным системе условий (10), (11), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(N_k(D_0) \bigcup N_k(D_1)\right) \setminus \{\alpha\}$.

Определение 2.1 *Функцию, которая определена равенством (13), будем называть функцией, синтезирующей семейство* $\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1}$ *при* $1 \le k \le n$.

Введены в рассмотрение вектор–функции

$$F(t,y,D_i,d_i) = D_i\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_i\right)^{-1}\left(z-\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}d_i\right)+d_i,$$
$$i=0,1,$$

где $z \in \mathbb{R}^k$, $n+1 \le k \le 2n$. В п. 1.6 настоящей работы показано, что множества $N_k(D_0)$ нулей функции $\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_0\right)$ на отрезке $[t_0,\alpha]$ конечны, $N_k(D_1)$ нулей функции $\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_1\right)$ на отрезке $[\alpha,t_1]$ конечны.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5 *Если вектор-функция* $x(t) \in W_2^1[t_0,t_1]$ *есть решение системы*

$$\dot{x} = Ax + bu(t,x_1,\dots,x_n,x_1^{(n)},\dots,x_1^{(k)}),\ t\in[t_0,\alpha)\bigcup(\alpha,t_1], \tag{14}$$

где $u(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\dots,x_1^{(k)})$ *определена по формуле*

$$u(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)}\dots,x_1^{(k)}) = \begin{cases} g\left(x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T + x_1^{(k)} - \\ g\left(x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T + x_1^{(k)} - \end{cases}$$
$$\begin{matrix} -Q^1\Phi_1^{(k)}(t)F\left(t,\left(x_1,\dots,x_n,x_1^{(n)},\dots,x_1^{(k-1)}\right)^T,D_0,d_0\right),\ t\in[t_0,\alpha], \\ -Q^1\Phi_1^{(k)}(t)F\left(t,\left(x_1,\dots,x_n,x_1^{(n)},\dots,x_1^{(k-1)}\right)^T,D_1,d_1\right),\ t\in(\alpha,t_1], \end{matrix} \tag{15}$$

$g=(g_n,g_{n-1},\dots,g_1,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$, *и* $x^{(n)}(t)$ *непрерывна в точках множества* $(N_k(D_0)\bigcup N_k(D_1))\setminus\{\alpha\}$, *то* $x(t)$ *является функцией семейства* $\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1}$.

Обратно, если $x(t)$ *есть функция семейства* $\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1}$, *то* $x(t)$ *является решением системы (14), где* $u(t,x_1,x_2,\dots,x_n,x_1^{(n)},\dots,x_1^{(k)})$ *определена по формуле (15), и* $x^{(n)}(t)$ *непрерывна в точках множества* $(N_k(D_0)\bigcup N_k(D_1))\setminus\{\alpha\}$.

Определение 2.2 *Функцию, которая определена равенством (15), будем называть функцией, синтезирующей семейство* $\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1}$ *при* $n+1 \le k \le 2n$.

Приведены примеры синтезирующих функций для некоторых k–параметрических семейств оптимальных траекторий.

Вышеизложенные теоремы 2.4, 2.5 являются основными результатами второй главы настоящей работы.

В параграфе 2.4 показано, что введенные семейства $\mathbb{M}^{\alpha}_{k,D_0,D_1,d_0,d_1}$ при условии $\alpha \notin N_k(D_1)$ могут быть выделены из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач с помощью линейных стационарных условий, связывающих значения траектории на концах и в точке $t = \alpha$ временного отрезка. Приведены соответствующие примеры.

В главе 3 рассматриваются всевозможные задачи оптимального управления (1), (2) при неотрицательно определенной матрице M и различных условиях, связывающих значения траектории на концах и в конечном числе s внутренних точек $\{\alpha_j\}_{j=\overline{1,s}}$ временного отрезка. Для простоты изложения введены обозначения $\alpha_0 = t_0$, $\alpha_{s+1} = t_1$. В параграфе 3.1 доказана теорема существования и единственности решения задач (1), (2) при неотрицательно определенной матрице M с закреплением траектории в точках α_j, $j = \overline{0, s+1}$ временного отрезка.

В параграфе 3.2 с использованием соотношений принципа максимума (3), рассмотренных на $[\alpha_0, \alpha_1) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{s-1}(\alpha_i, \alpha_{i+1})\right) \bigcup (\alpha_s, \alpha_{s+1}]$, из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач выделены семейства

$$\mathbb{M}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}_{k,D_0,\ldots,D_s,d_0,\ldots,d_s} = \left\{ x(t) \in W_2^1[t_0,t_1] \,\middle|\, \exists p^j \in \mathbb{R}^k, j = \overline{0,s}: \right.$$

$$\Phi_1(\alpha_j)(D_{j-1}p^{j-1} + d_{j-1}) = \Phi_1(\alpha_j)(D_j p^j + d_j), \quad j = \overline{1,s},$$

$$\left. x(t) = \begin{cases} \Phi_1(t)(D_0 p^0 + d_0), & t \in [\alpha_0, \alpha_1], \\ \Phi_1(t)(D_j p^j + d_j), & t \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}], \quad j = \overline{1,s} \end{cases} \right\},$$

где $\Phi_1(t)$ — есть первые n строк фундаментальной матрицы решений системы (3), $D_0, D_1, \ldots, D_s$ — постоянные матрицы размера $2n \times k$ ранга k, $d_0, d_1, \ldots, d_s$ — постоянные векторы размера $2n$, p^j, $j = \overline{0,s}$, есть вектора-параметры размерности k, $1 \le k \le 2n$.

В параграфе 3.3 введены в рассмотрение вектор–функции

$$F(t, y, D_j, d_j) = D_j \left(Q^k \Phi_1(t) D_j\right)^{-1} \left(y - Q^k \Phi_1(t) d_j\right) + d_j, \quad j = \overline{0,s}.$$

где $y \in \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n$. В п. 1.6 настоящей работы показано, что множества $N_k(D_j)$ нулей функции $\det\left(Q^k\Phi_1(t)D_j\right)$ на отрезке $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ конечны, $j = \overline{0, s}$.

Точки множества $N_k(D_j)$ разбивают отрезок $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ на конечное число непересекающихся интервалов $I_1(D_j)$, $I_2(D_j)$, $\ldots$, $I_{m_j}(D_j)$. Через $T(D_j) = \{\tau_i\}_{i=\overline{1,m_j}}$ обозначены произвольным образом выбранные последовательности точек таких, что $\tau_i \in I_i(D_j)$, $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{0, s}$.

Вводится в рассмотрение система линейных условий

$$Q_{n-k}x(t) = Q_{n-k}\Phi_1(t)F(t, Q^k x(t), D_j, d_j), \quad t \in T(D_j), \quad j = \overline{0, s}. \tag{16}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4 *Если вектор-функция $x(t) \in W_2^1[\alpha_0, \alpha_{s+1}]$ есть решение системы*

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x_1, x_2, \ldots, x_k),$$
$$t \in [\alpha_0, \alpha_1) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{s-1} (\alpha_j, \alpha_{j+1}) \right) \bigcup (\alpha_s, \alpha_{s+1}], \tag{17}$$

где $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена по формуле

$$u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} b^T(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t)) \times \\ b^T(\dot{\Phi}_1(t) - A\Phi_1(t)) \times \end{cases}$$
$$\begin{matrix} \times F\left(t, (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T, D_0, d_0\right), \ t \in [\alpha_0, \alpha_1], \\ \times F\left(t, (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T, D_j, d_j\right), \ t \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}], \ j = \overline{1, s}, \end{matrix} \tag{18}$$

подчиненное системе линейных условий (16), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(\bigcup_{j=0}^{s} N_k(D_j)\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{s} \{\alpha_j\}\right)$, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{k, D_0, \ldots, D_s, d_0, \ldots, d_s}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$.

Обратно, если $x(t)$ есть функция семейства $\mathbb{M}_{k, D_0, \ldots, D_s, d_0, \ldots, d_s}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$, то $x(t)$ является решением системы (17), где $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ определена по формуле (18), подчиненным системе линейных условий (16), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(\bigcup_{j=0}^{s} N_k(D_j)\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{s} \{\alpha_j\}\right)$.

Определение 3.1 *Функцию, которая определена равенством (18), будем называть функцией, синтезирующей семейство $\mathbb{M}_{k, D_0, \ldots, D_s, d_0, \ldots, d_s}^{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$ при $1 \leq k \leq n$.*

Введены в рассмотрение вектор-функции

$$F(t,y,D_j,d_j) = D_j\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_j\right)^{-1}\left(z-\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}d_j\right)+d_j,$$
$$j=\overline{0,s},$$

где $z\in\mathbb{R}^k$, $n+1\le k\le 2n$. В п. 1.6 настоящей работы показано, что множества $N_k(D_j)$ нулей функции $\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_j\right)$ на отрезке $[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$ конечны, $j=\overline{0,s}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.5 *Если вектор-функция $x(t)\in W_2^1[\alpha_0,\alpha_{s+1}]$ есть решение системы*

$$\dot{x} = Ax + bu(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\ldots,x_1^{(k)}),$$
$$t\in[\alpha_0,\alpha_1)\bigcup\left(\bigcup_{j=1}^{s-1}(\alpha_j,\alpha_{j+1})\right)\bigcup(\alpha_s,\alpha_{s+1}], \quad (19)$$

где $u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\ldots,x_1^{(k)})$ определена по формуле

$$u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\ldots,x_1^{(k)}) =$$
$$=\begin{cases} g(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - Q^1\Phi_1^{(k)}(t)\times \\ g(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)})^T + x_1^{(k)} - Q^1\Phi_1^{(k)}(t)\times \end{cases}$$
$$\begin{matrix}\times F\left(t,(x_1,\ldots,x_1^{(k-1)})^T,D_0,d_0\right), & t\in[\alpha_0,\alpha_1],\\ \times F\left(t,(x_1,\ldots,x_1^{(k-1)})^T,D_j,d_j\right), & t\in(\alpha_j,\alpha_{j+1}],\ j=\overline{1,s}.\end{matrix} \quad (20)$$

$g=(g_n,g_{n-1},\ldots,g_1,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$, и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(\bigcup_{j=0}^s N_k(D_j)\right)\setminus\left(\bigcup_{j=1}^s\{\alpha_j\}\right)$, то $x(t)$ является функцией семейства $\mathbb{M}_{k,D_0,\ldots,D_s,d_0,\ldots,d_s}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$.

Обратно, если $x(t)$ есть функция семейства $\mathbb{M}_{k,D_0,\ldots,D_s,d_0,\ldots,d_s}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$, то $x(t)$ является решением системы (19), где $u(t,x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)},\ldots,x_1^{(k)})$ определена по формуле (20), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множества $\left(\bigcup_{j=0}^s N_k(D_j)\right)\setminus\left(\bigcup_{j=1}^s\{\alpha_j\}\right)$.

Определение 3.2 *Функцию, которая определена равенством (20), будем называть функцией, синтезирующей семейство $\mathbb{M}_{k,D_0,\ldots,D_s,d_0,\ldots,d_s}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ при $n+1\le k\le 2n$.*

Вышеизложенные теоремы 3.4, 3.5 являются основными результатами третьей главы настоящей работы.

В параграфе 3.4 показано, что введенные семейства $\mathbb{M}^{\alpha_1,\dots,\alpha_s}_{k,D_0,\dots,D_s,d_0,\dots,d_s}$ при условиях $\alpha_j \notin N_k(D_j)$, $j=\overline{1,s}$, могут быть выделены из множества оптимальных траекторий рассматриваемых задач с помощью линейных стационарных условий, связывающих значения траектории в точках α_j, $j=\overline{0,s+1}$, временного отрезка.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю — профессору А.П. Хромову за поставленные задачи и большое внимание к работе.

Список литературы

[1] Беллман Р. Динамическое программирование. М., Изд. иностр. лит., 1960.

[2] Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. К теории оптимальных процессов// ДАН СССР, 1956. т. 110, N 1. С. 7-10.

[3] Корнев В.В. О существовании синтезирующих функций для линейно-квадратичных задач оптимального управления// Математика и ее приложения: Межвуз. науч. сб. Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 44-45.

[4] Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., "Наука". 1968.

[5] Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов// А и Т. 1960. т. 21. N 4. С. 436-441. N 5. С. 561-568. N 6. С. 661-664.

[6] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

[7] Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства// А и Т, т. 16, 1955, N 2. С. 120-149.

[8] Хромов А.П. О задаче синтеза линейных систем с квадратичным критерием качества// Математика и ее приложения: Межвуз. науч. сб. Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 47-48.

[9] Хромов А.П. О синтезирующих функциях линейной дифференциальной системы с квадратичным критерием качества// Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1988. С. 59-65.

[10] Хромов А.П. О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества// Теория функций и приближений. Труды 4-ой Сарат. зимн. школы. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 1. С. 106-112.

[11] Хромов А.П. О задаче синтеза для линейных систем с квадратичным критерием качества// Дифференциальные уравнения и теория функций: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 9. С. 3-14.

Печатные работы автора по теме диссертации

[12] Огнева Е.А. Об одном классе синтезирующих функций линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докл. 10-ой Сарат. зимн. школы. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 101-102.

[13] Огнева Е.А. Один класс синтезирующих функций линейных систем с квадратичным критерием качества// Математика. Механика: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. - Вып. 2. С. 89-92.

[14] Трушкова Е.А. Один класс синтезирующих функций линейных систем с квадратичным критерием качества// Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов. - Воронеж, ВГУ, 2001. С. 261-262.

[15] Трушкова Е.А. О функциях, синтезирующих семейства оптимальных траекторий управляемых систем// "Понтрягинские чтения - XIII". Сб. материалов. - Воронеж, ВГУ, 2002. С. 147-148.

[16] Трушкова Е.А. Синтезирующие функции для семейств оптимальных траекторий линейных управляемых систем с квадратичным критерием качества// Деп. в ВИНИТИ, 30.09.2002, N 1647-В2002, 60 с.